Próbny Egzamin Maturalny z matematyki z Kogutorium

POZIOM PODSTAWOWY

Klucz odpowiedzi

Autorzy: Mikołaj Stefaniszyn
Ksenia Talowska
Korekta: Kamil Tomaszek

www.kogutorium.org
facebook.com/kogutorium
facebook.com/groups/statutawka

Zadanie 1. (0-1 pkt)
Odpowiedź: D

Zadanie 2. (0-1 pkt)
Odpowiedź: C

Zadanie 3. (0-1 pkt)
Odpowiedź: B

Zadanie 4. (0-1 pkt)
Odpowiedź: B

Zadanie 5. (0-1 pkt)
Odpowiedź: C

Zadanie 6. (0-1 pkt)
Odpowiedź: D

Zadanie 7. (0-1 pkt)
Odpowiedź: A

Zadanie 8. (0-1 pkt)
Odpowiedź: C

Zadanie 9. (0-1 pkt)
Odpowiedź: B

Zadanie 10. (0-1 pkt)
Odpowiedź: D

Zadanie 11. (0-1 pkt)
Odpowiedź: B

Zadanie 12. (0-1 pkt)
Odpowiedź: C

Zadanie 13. (0-1 pkt)
Odpowiedź: C

Zadanie 14. (0-1 pkt)
Odpowiedź: A

Zadanie 15. (0-1 pkt)
Odpowiedź: C

Zadanie 16. (0-1 pkt)
Odpowiedź: B

Zadanie 17. (0-1 pkt)
Odpowiedź: D

Zadanie 18. (0-1 pkt)
Odpowiedź: A

Zadanie 19. (0-1 pkt)
Odpowiedź: B

Zadanie 20. (0-1 pkt)
Odpowiedź: A

Zadanie 21. (0-1 pkt)
Odpowiedź: B

Zadanie 22. (0-1 pkt)
Odpowiedź: D

Zadanie 23. (0-1 pkt)
Odpowiedź: B

Zadanie 24. (0-1 pkt)
Odpowiedź: A

Zadanie 25. (0-1 pkt)
Odpowiedź: D

Uwaga do części otwartej: zadania można rozwiązywać różnymi sposobami. Klucz odpowiedzi w punktach częściowych oraz sugestiach rozwiązań może nie uwzględniać wszystkich poprawnych sposobów rozwiązań. Za każde w pełni poprawne rozwiązanie powinna być przydzielona maksymalna liczba punktów.

Zadanie 26. (0-2 pkt)

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych m oraz k prawdziwa jest nierówność:

$$m^2 + 2mk + 2k^2 + \frac{1}{7} > 0$$

Przykładowe rozwiązanie:

Zauważmy, że $m^2 + 2mk + 2k^2 + \frac{1}{7} = (m^2 + 2mk + k^2) + k^2 + \frac{1}{7}$

Korzystając ze wzoru na kwadrat sumy (wzór skróconego mnożenia) można zapisać to jako $(m+k)^2 + k^2 + \frac{1}{7}$.

Wyrażenia $(m+k)^2$ *oraz* k^2 *są kwadratami, zatem zawsze są nieujemne.*

Dochodzimy więc do wniosku, że $m^2 + 2mk + 2k^2 \geq 0$.

Po obustronnym dodaniu $\frac{1}{7}$ *otrzymujemy* $m^2 + 2mk + 2k^2 + \frac{1}{7} \geq \frac{1}{7}$ *dla każdego rzeczywistego m oraz k, zatem* $m^2 + 2mk + 2k^2 + \frac{1}{7} > 0$ *dla każdego rzeczywistego m oraz k, c. n. w.*

Proponowany schemat punktowania:

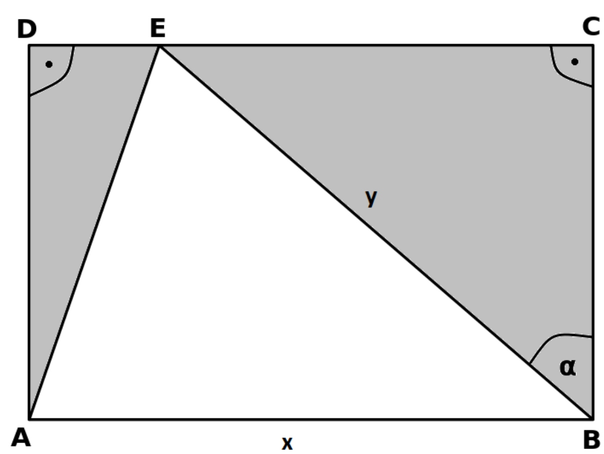
2 pkt za poprawne rozwiązanie, w tym:

1 pkt – krok istotny do przeprowadzenia dowodu, np. zapisanie wyrażenia jako $(m+k)^2+k^2+(1/7)$

1 pkt – za doprowadzenie dowodu do końca

Zadanie 27. (0-2 pkt)

Wykaż, że pole zacieniowanego obszaru jest równe $\frac{1}{2}\, xy\, cos\alpha$, gdzie x=|AB| i y=|BE|.



Przykładowe rozwiązanie:

Zauważmy, że szukane pole ($P_{AED} + P_{BCE}$*) jest takie samo jak pole trójkąta* ABE. *Można to wykazać na przykład zauważając, że* $P_{ABE} = ½\ (|DE|+|EC|)\cdot|AD| = ½|DE|\cdot|AD|+½|EC|\cdot|AD|$. *Wystarczy więc wykazać, że pole trójkąta ABE jest równe szukanej wartości, tj.* ½ xycosα.

Korzystając z wzorów redukcyjnych otrzymujemy równość $\sin(90^0-\alpha)=\cos\alpha$. *Wiemy zatem, że* sin(ABE)=cosα.

Możemy więc skorzystać z następującego wzoru na pole trójkąta:

pole= ½ bok*bok*sinus kąta między tymi bokami. *Otrzymujemy więc, że*

$P_{zacieniowanego\ obszaru} = P_{ABE}$ = ½xysin(ABE) = ½xycosα, *co kończy dowód.*

Proponowany schemat punktowania:

2 pkt za poprawne rozwiązanie, w tym:

1 pkt – krok istotny do przeprowadzenia dowodu, np. zauważenie, że $P_{szukane}=P_{ABE}$ i tego wykazanie

1 pkt – za doprowadzenie dowodu do końca

Zadanie 28. (0-2 pkt)

Odpowiedź

$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, \infty\right)$ LUB $x \in \boldsymbol{R} - < -\frac{1}{2}, \frac{3}{4} >$

Proponowany schemat punktowania:

2 pkt za poprawne rozwiązanie, w tym:

1 pkt – wymnożenie wyrażenia po lewej stronie nierówności i wyznaczenie jego pierwiastków: -½ i ¾

1 pkt – poprawne wyznaczenie zbioru będącego rozwiązaniem nierówności

Zadanie 29. (0-3 pkt)

Odpowiedź:

Wyraz ogólny: $a_n = 4 \cdot 2^{n-1}$

Suma sześciu pierwszych wyrazów: $S_6 = 252$

Proponowany schemat punktowania:

3 pkt za poprawne rozwiązanie, w tym:

1 pkt – krok istotny do rozwiązania zadania: poprawne wyznaczenia $a_1=4$ lub $q=2$ lub $q^2=4$

1 pkt – poprawne wyznaczenie wyrazu ogólnego ciągu

1 pkt – poprawne wyznaczenie sumy sześciu pierwszych wyrazów ciągu

Zadanie 30. (0-3 pkt)

Odpowiedź:

$\frac{1}{24}$

Proponowany schemat punktowania:

3 pkt za poprawne rozwiązanie, w tym:

1 pkt – wyznaczenie kombinacji liczb, które trzeba kolejno wyrzucić, aby spełnić warunek iloczynu równego 18 (1-3-6, 1-6-3, 3-1-6, 3-6-1, 6-1-3, 6-3-1, 2-3-3, 3-2-3, 3-3-2)

1 pkt – krok istotny do wyznaczenia prawdopodobieństwa: wyznaczenie prawdopodobieństwa każdej z powyższych kombinacji ($\frac{1}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{1}{216}$) LUB wyznaczenie mocy przestrzeni zdarzeń elementarnych (Ω=216)

1 pkt – poprawne wyznaczenie szukanego prawdopodobieństwa

Zadanie 31. (0-2 pkt)

Odpowiedź:

$P = 18\sqrt{3}\ cm^3$

Proponowany schemat punktowania:

2 pkt za poprawne rozwiązanie, w tym:

1 pkt – krok istotny do wyznaczenia pola, np. wyznaczenie miar kątów i/lub długości boków trójkąta

1 pkt – poprawne obliczenie pola (wraz z jednostką)

Zadanie 32. (0-3 pkt)

Odpowiedź:

P = 16,5

Proponowany schemat punktowania:

2 pkt za poprawne rozwiązanie, w tym:

1 pkt – wyznaczenie współrzędnych punktu C(-1,1)

1 pkt – krok istotny do obliczenia pola, np: obliczenie długości dowolnego boku trójkąta LUB wyznaczenie wektorów AB, AC, BC LUB zapisanie wzoru na pole trójkąta z wierzchołków (wzór z wyznacznikiem 3. stopnia, wykracza poza podstawę programową)

1 pkt – poprawne wyznaczenie pola trójkąta

Zadanie 33. (0-4 pkt)

Odpowiedź:

$f(x) = x^2 + 4x + 1$

dla x∈<-6,1> :

$f_{min}(-2) = -3 \qquad f_{\max}(-6) = 13$

Proponowany schemat punktowania:

4 pkt za poprawne rozwiązanie, w tym:

1 pkt – krok istotny dla rozwiązania, np. wyznaczenie współczynnika c=1 i/lub ustalenie, że –b/2a = -2

1 pkt – poprawne wyznaczenie wzoru ogólnego funkcji

1 pkt – poprawne wyznaczenie wartości minimalnej funkcji: -3

1 pkt – poprawne wyznaczenie wartości maksymalnej funkcji: 13

Zadanie 34. (0-4 pkt)

Odpowiedź:

V=400 cm^3

Proponowany schemat punktowania:

4 pkt za poprawne rozwiązanie, w tym:

1 pkt – krok istotny do rozwiązania zadania, np. wyznaczenie długości krawędzi podstawy a=10cm lub wyznaczenie pola powierzchni bocznej P_b=260cm^2

1 pkt – krok przybliżający do rozwiązania, np. wyznaczenie długości krawędzi ostrosłupa ($l = \sqrt{194}$) lub wyznaczenie wysokości ściany bocznej (h=13)

1 pkt – poprawne wyznaczenie wysokości ostrosłupa (H=12)

1 pkt – poprawne wyznaczenie objętości ostrosłupa (wraz z jednostką)

Kogutorium to stowarzyszenie z siedzibą w Jaworznie (adres korespondencyjny: skrytka pocztowa nr 115, 71-449 Szczecin UP 41), wpisane do Krajowego Rejestru Sądowego - nr KRS: 0000911208, akta rejestrowe prowadzone przez Sąd Rejonowy Katowice-Wschód VIII Wydział Gospodarczy, NIP: 6322028935, REGON: 389518882. E-mail: biuro@kogutorium.org